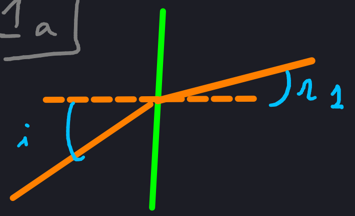
$D_s 01$: Optique géométrique

Exercice 1 : Guidage de rayons lumineux

1a)



On a $n_0 \sin(i) = n_1 \sin(r)$

ie $\boxed{r_1 = \arcsin\left(\frac{n_0 \sin(i)}{n_1}\right) = 22°}$

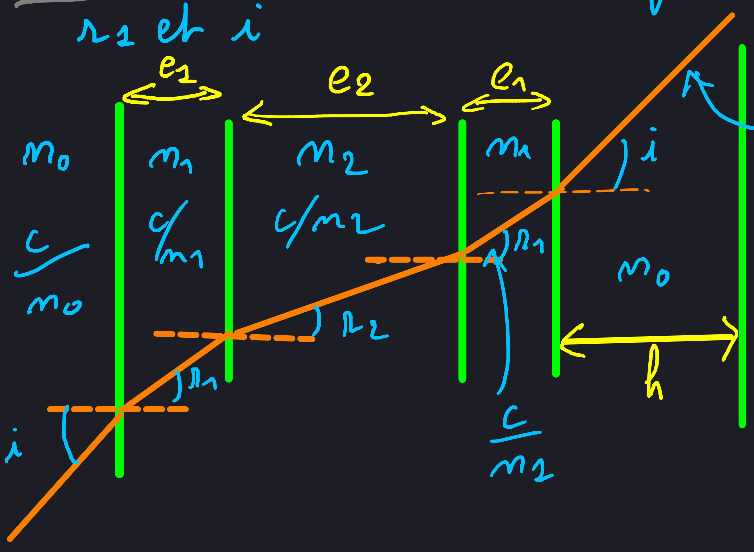
$i \to 30°$, $n_0 \to 1$, $n_1 \to 1{,}3$

1b) De même : $n_1 \sin(r_1) = n_2 \sin(r_2)$

$\boxed{r_2 = \arcsin\left(\frac{n_0 \sin i}{n_2}\right) = 19°}$

$n_2 \to 1{,}5$

2a) Dans $\mathcal{G}_3$ et $\mathcal{G}_0$, les angles redeviennent r_1 et i



vitesse $\frac{c}{n_0}$

longueur $\frac{h}{\cos(i)}$

durée $\frac{h n_0}{c \cos(i)}$

$= \frac{h n_0}{c\sqrt{1-\sin^2 i}}$

Au total

$$\tau = \frac{1}{c}\left(\frac{h n_0}{\sqrt{1-\sin^2 i}} + \frac{e_2 n_2}{\sqrt{1-\sin^2 r_2}} + \frac{2 e_1 n_1}{\sqrt{1-\sin^2 r_1}}\right)$$

10^{-2}

$$\boxed{= \frac{1}{c}\left(\frac{h n_0}{\sqrt{1-\sin^2 i}} + \frac{e_2 n_2^2}{\sqrt{n_2^2 - n_0^2 \sin^2 i}} + \frac{2e_1 n_1^2}{\sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 i}}\right)}$$

$h \to 5\cdot10^{-1}$, $n_0 \to 1$, $e_2 \to 10^{-2}$, $n_2 \to 1{,}5$, $e_1 \to 10^{-2}$, $n_1 \to 1{,}3$, $c \to 3\cdot10^{8}$, $i \to 30$

2b) On a immédiatement :

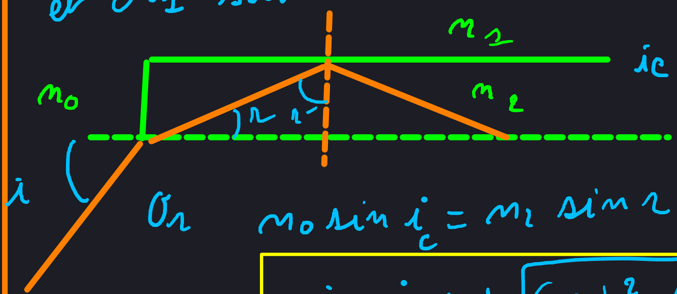
$$\tau_0 = \frac{n_0}{c}\left(\frac{h + e_2 + 2e_1}{\sqrt{1-\sin^2 i}}\right)$$

2c) On calcule : $\boxed{\tau - \tau_0 = 2{,}3\cdot10^{-11}\,\mathrm{s}}$

3a) On doit avoir réflexion totale entre $\mathcal{G}_2$ et $\mathcal{G}_1$ soit :

$n_2 \sin r' = n_1$

ie $n_2 \cos r = n_1$



Or $n_0 \sin i_c = n_2 \sin r = n_2\sqrt{1-\cos^2 r}$

$$\boxed{\sin i_c = \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_0}\right)^2 - \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2} \to i_c = 44°}$$

$n_2 \to 1{,}5$, $n_0 \to 1$, $n_1 \to 1{,}3$

3b] La durée de propagation dépend de i :

• minimale pour $i = 0$: $\tau_{min} = \dfrac{D n_2}{c}$

• maximale pour $i = i_c$ $\tau_{max} = \dfrac{D n_2}{c \cos(r)}$

avec $\cos(r) = \sin(r') = \dfrac{n_1}{n_2}$ → $\tau_{max} = \dfrac{D n_2^2}{c n_1}$

Le retard des plus lents sera

$$\Delta\tau = \tau_{max} - \tau_{min} = \frac{D n_2}{c}\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)$$

soit une durée

$$\boxed{\tau_0 + \Delta\tau = \underbrace{\tau_0}_{10^{-10}} + \frac{D \overbrace{n_2}^{1,5}}{\underbrace{c}_{3\cdot10^{8}}}\left(\frac{\overbrace{n_2}^{1,5}}{\underbrace{n_1}_{1,3}} - 1\right) = 2,5\cdot10^{-10}\ \text{s}}$$

(D : $2\cdot10^{-1}$)

4a] On a immédiatement :

$$\boxed{n_f = \underbrace{n_1}_{1,3} + \frac{2(\overbrace{n_2}^{1,5} - n_1)}{\underbrace{M}_{5} + 1} = 1,39}$$

4b] D'une couche à l'autre, on a conservation de la quantité $n \sin(r')$

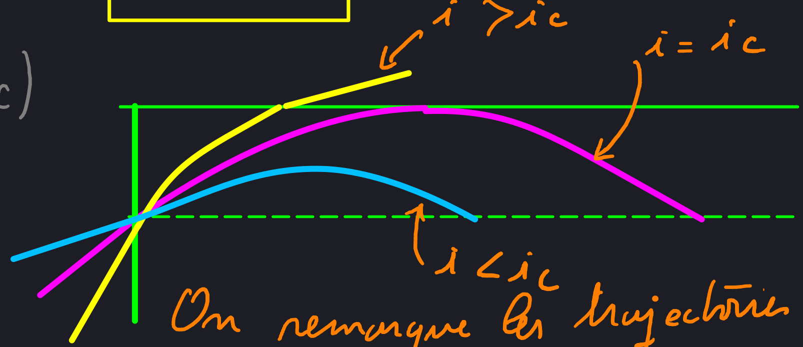
Les résultats précédents donnent :

$$\sin i_c = \sqrt{\left(\frac{\overbrace{n_2}^{1,5}}{\underbrace{n_0}_{1}}\right)^2 - \left(\frac{\overbrace{n_1}^{1,33}}{n_0}\right)^2},$$

quel que soit le nombre de couches, cependant n_f dépend de M

$$\boxed{i_c = 44^\circ}$$

4c)

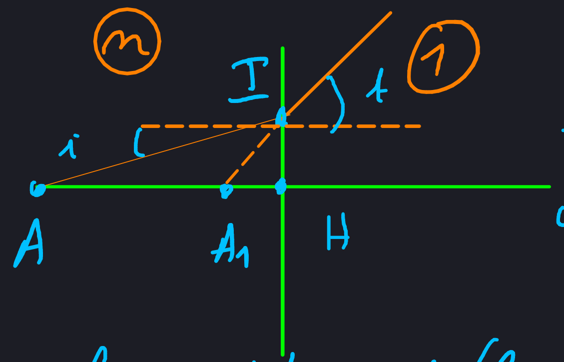


On remarque les trajectoires sont moins inclinées que dans le cas de la structure à 2 indices : la dispersion intermodale sera plus faible

On n'a représenté que les rayons transmis

Exo 2 : Capture d'empreintes digitales

1a)



On a
$n \sin i = \sin t$

or $\tan i = \frac{HI}{AH}$

$\tan t = \frac{HI}{A_1H}$

Dans les conditions de Gauss :

$\tan i \simeq i$; $\tan t \simeq t$ $i \times AH = t \times A_1H$

soit $\boxed{\frac{\overline{HA}}{\overline{HA_1}} = \frac{t}{i} = n}$ (puisque $\overline{HA}$ et $\overline{HA_1}$ sont de même signe)

1b) On a $D_1 = \overline{A_1A'_1} = \overline{A_1O} + \overline{OA'_1} = p' - p$

ie $D_1 = p\left(\frac{p'}{p} - 1\right) = p(\gamma - 1)$ soit

$\boxed{p = \frac{D_1}{\gamma - 1}}$ et $\boxed{p' = \gamma p = \frac{\gamma D_1}{\gamma - 1}}$

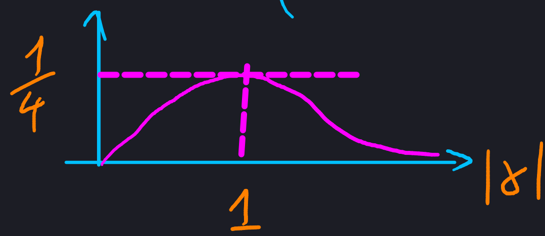
De plus $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$, soit $1 - \frac{p'}{p} = \frac{p'}{f'}$

ie $p'/f' = 1 - \gamma$ soit $\boxed{f' = \frac{p'}{1-\gamma} = \frac{-\gamma D_1}{(\gamma - 1)^2}}$

1c) Avec $\gamma < 0$, on a $\gamma = -|\gamma|$, soit

$f' = \frac{|\gamma| D_1}{(|\gamma|+1)^2}$ or $|\gamma| \longmapsto \frac{|\gamma|}{(|\gamma|+1)^2}$ a

l'allure suivante



(on le vérifie avec sa dérivée :

$= \frac{1}{(|\gamma|+1)^2} - \frac{2|\gamma|}{(|\gamma|+1)^3} = \frac{1-|\gamma|}{(|\gamma|+1)^3}$,

positive ssi $|\gamma| < 1$)

On a donc $\frac{|\gamma|}{(|\gamma|+1)^2} < \frac{1}{4}$ ie $\boxed{D_1 > 4f'}$

1d) On connaît $D = \overline{AA'_1}$. De plus

$\overline{AA_1} = L - A_1H = L - \frac{AH}{n} = L\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

et $D_1 = \overline{A_1A'_1} = D - \overline{AA_1} = D - L\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

On cherche $\boxed{p' = \frac{-\gamma D_1}{\gamma - 1} = \frac{-\underbrace{\gamma}_{-2}\left(\underbrace{D}_{0,1} - \underbrace{L}_{3\cdot 10^{-2}}\left(1 - \frac{1}{\underbrace{n}_{1,5}}\right)\right)}{\gamma - 1} = 6\,\text{cm} = \overline{OA'_1}}$

$$\boxed{\text{et } f' = \frac{p'}{1-\gamma} = \frac{-\gamma}{(\gamma-1)^2}\left[D - L\left(1-\frac{1}{n}\right)\right] = 2\,\text{cm}}$$

1-e) La courbe de $\dfrac{|\gamma|}{(|\gamma|+1)^2} = \dfrac{f'}{D_1}$ assure que, pour $|\gamma| = 2$, une croissance de $|\gamma|$ conduira à une diminution de $\dfrac{f'}{D_1}$ donc de f' si $D_1 = \text{cst}$.

Néanmoins si f' diminue trop, on devra diminuer son diamètre pour rester dans les conditions de Gauss.

2a) La distance ℓ_c entre deux pixels doit être inférieure à la distance entre les images des 2 crêtes, séparées de $|\gamma| a$, soit

$$\boxed{\ell_c < |\gamma| a < 200\,\mu\text{m}}$$

($|\gamma| = 2$, $a = 10^{-4}$)

2b) Le point M_2 est dans un plan différent de M_1 : son image ne se forme pas sur le plan du CCD mais un peu en amont.

On a $OM_2 = |p| + e$ et $\quad \cdot\ \dfrac{1}{OM_2} + \dfrac{1}{OM'_2} = \dfrac{1}{f'}$

$$\cdot\ \frac{1}{|p|} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'}$$

soit, par différence : $\dfrac{1}{|p|} - \dfrac{1}{OM_2} = \dfrac{1}{OM'_2} - \dfrac{1}{p'}$

$$\text{ie } \frac{1}{OM'_2} = \frac{1}{|p|} - \frac{1}{|p|+e} + \frac{1}{p'}$$

$$= \underbrace{\frac{e}{|p|(|p|+e)}}_{\underset{e \ll |p|}{\approx} \frac{e}{|p|^2}} + \frac{1}{p'}$$

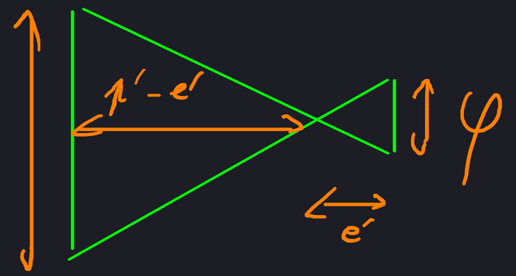
De plus $OM'_2 = p' - e'$

$$\frac{1}{OM'_2} = \frac{1}{p'-e'} \text{ soit } \frac{1}{p'-e'} \approx \frac{e}{p^2} + \frac{1}{p'}$$

$$\frac{e}{p^2} \approx \frac{1}{p'-e'} - \frac{1}{p'} = \underbrace{\frac{e'}{p'(p'-e')}}_{\underset{e \ll p'}{\approx} \frac{e'}{p'^2}}, \text{ soit}$$

$$\boxed{e' \approx \left(\frac{p'}{p}\right)^2 e = \gamma^2 e}$$

On en déduit, d'après Thalès :



$$\frac{e'}{\underbrace{p'-e'}_{\approx p'}} = \frac{\varphi}{d} \quad \text{soit} \quad \frac{\varphi}{d} \simeq \frac{e'}{p'} = \frac{\gamma^2 e}{\gamma |p|}$$

$$\approx \frac{e'}{p'} \quad (e' \ll p')$$

ie $\boxed{\varphi \simeq d\gamma \frac{e}{p}}$

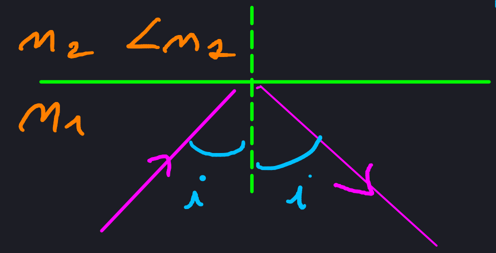
2c) On veut $\varphi > \gamma a$, soit

$$\gamma d \frac{e}{p} > \gamma a \quad \text{ie} \quad \boxed{\frac{d}{p} > \frac{\overset{10^{-4}}{a}}{\underset{3\,10^{-5}}{e}} \simeq 3{,}3}$$

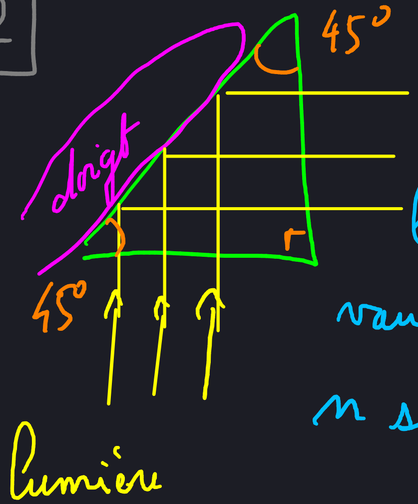
Les rayons marginaux parvenant sur la lentille auront donc une inclinaison i qui vérifie $\boxed{\tan i = \frac{d}{2p} \simeq 1{,}7}$, on est clairement hors des conditions de Gauss.

3a) Lors de la réfraction vers 1 milieu moins réfringent, on n'observera qu'un rayon réfléchi et pas de rayon réfracté si l'angle d'incidence i vérifie

$$\boxed{n_1 \sin i > n_2}$$



3b)



Avec le prisme isocèle rectangle, l'angle d'incidence vaut 45°, or

$$n \sin(45) = 1{,}5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} > 1,$$

il y a réflexion totale sur l'hypothénuse et la lumière ne parvient pas jusqu'au doigt.